

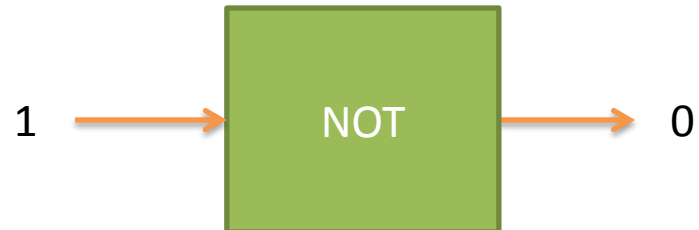
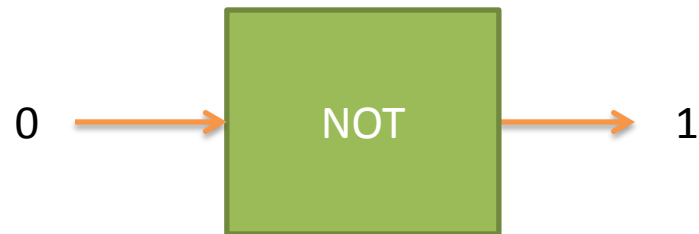
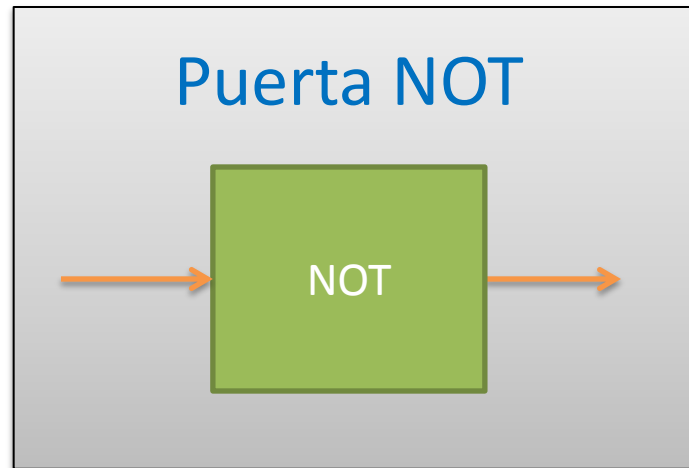
Introducción
a la
Computación Cuántica Topológica
PARTE 1

Sumario

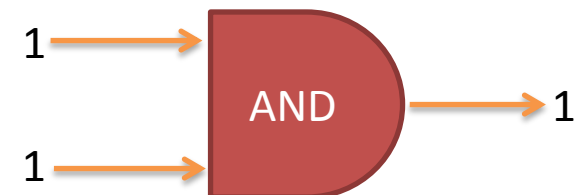
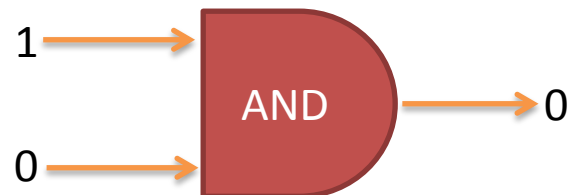
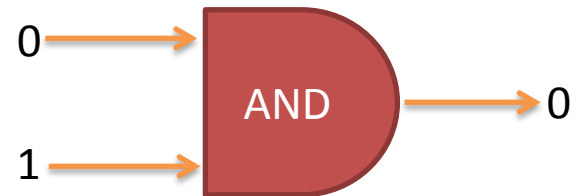
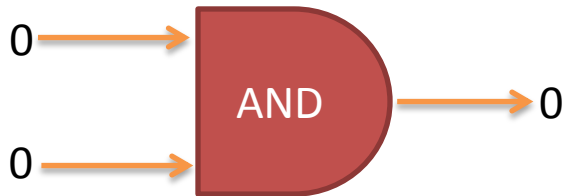
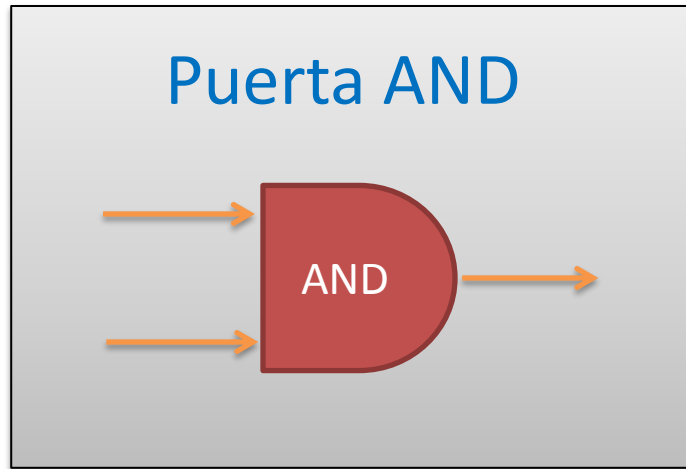
- Computación clásica
- Probabilidad
- Mecánica cuántica
- Computación cuántica

Computación Clásica

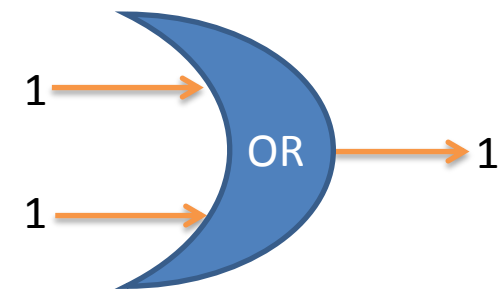
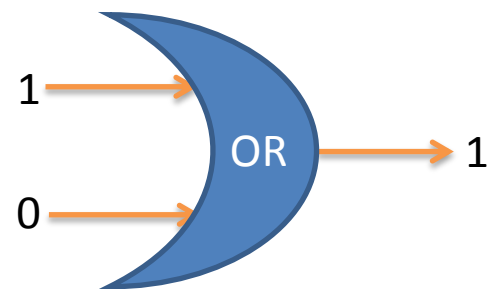
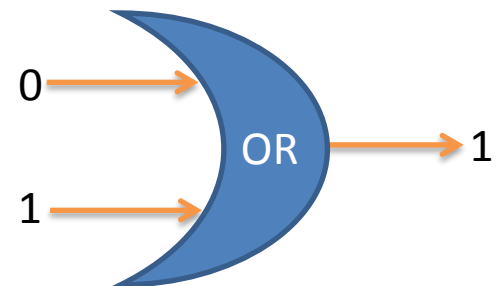
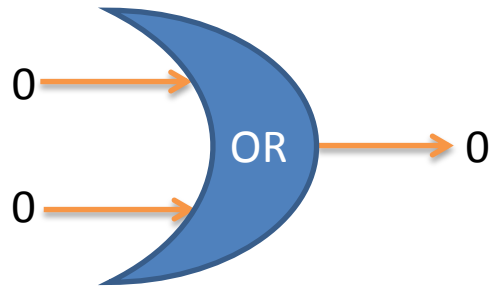
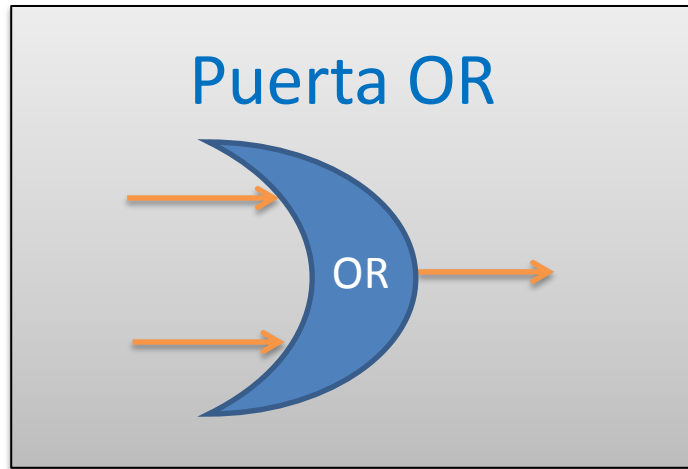
Computación Clásica



Computación Clásica



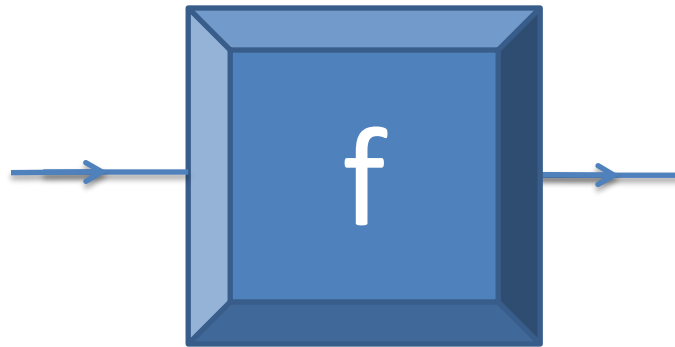
Computación Clásica



Computación Clásica

Nuestro Primer Algoritmo

Nos dan un dispositivo f



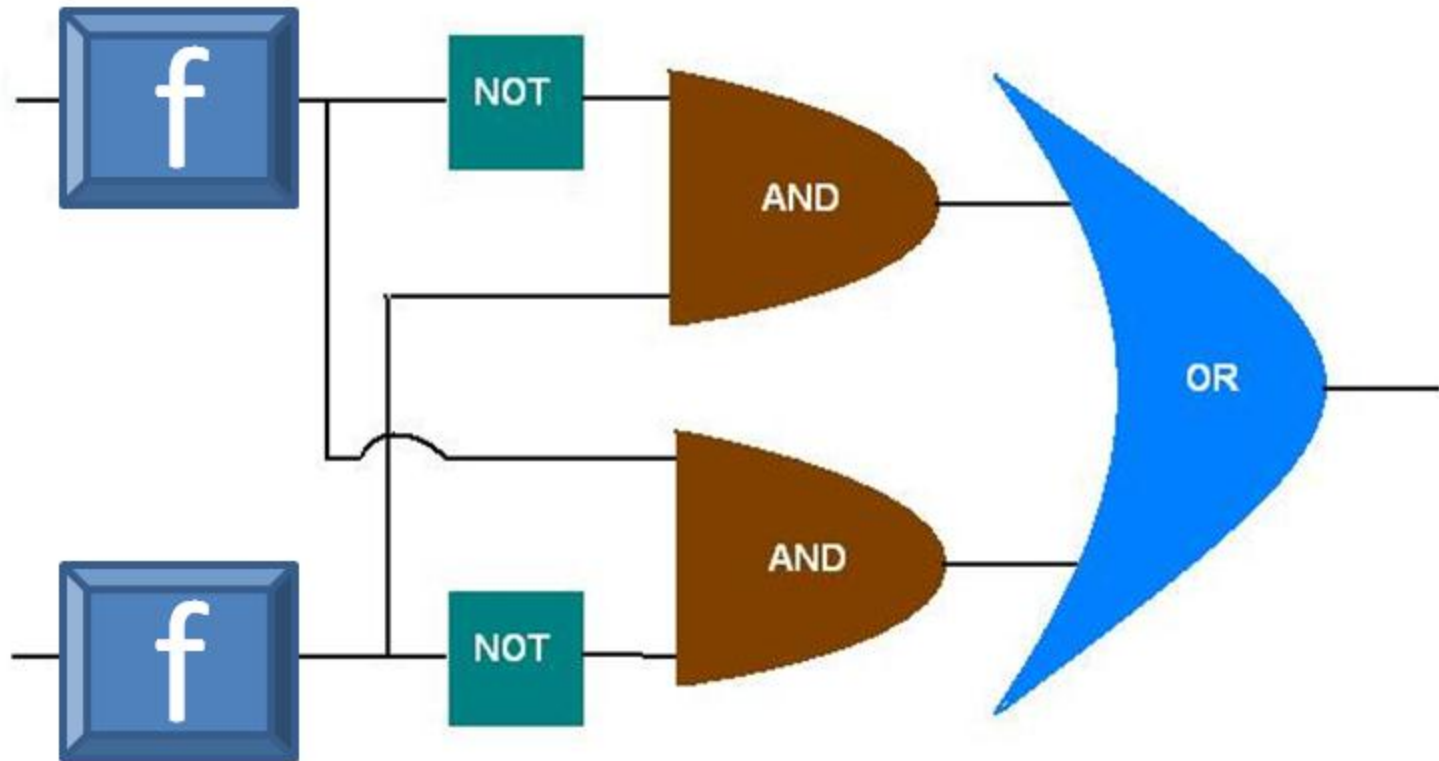
- Tanto la entrada como la salida es **0** ó **1**.
- Actúa siempre de la misma manera.

Nuestra misión

Construir un algoritmo que nos diga si es o no una función constante

Computación Clásica

Esta es una solución

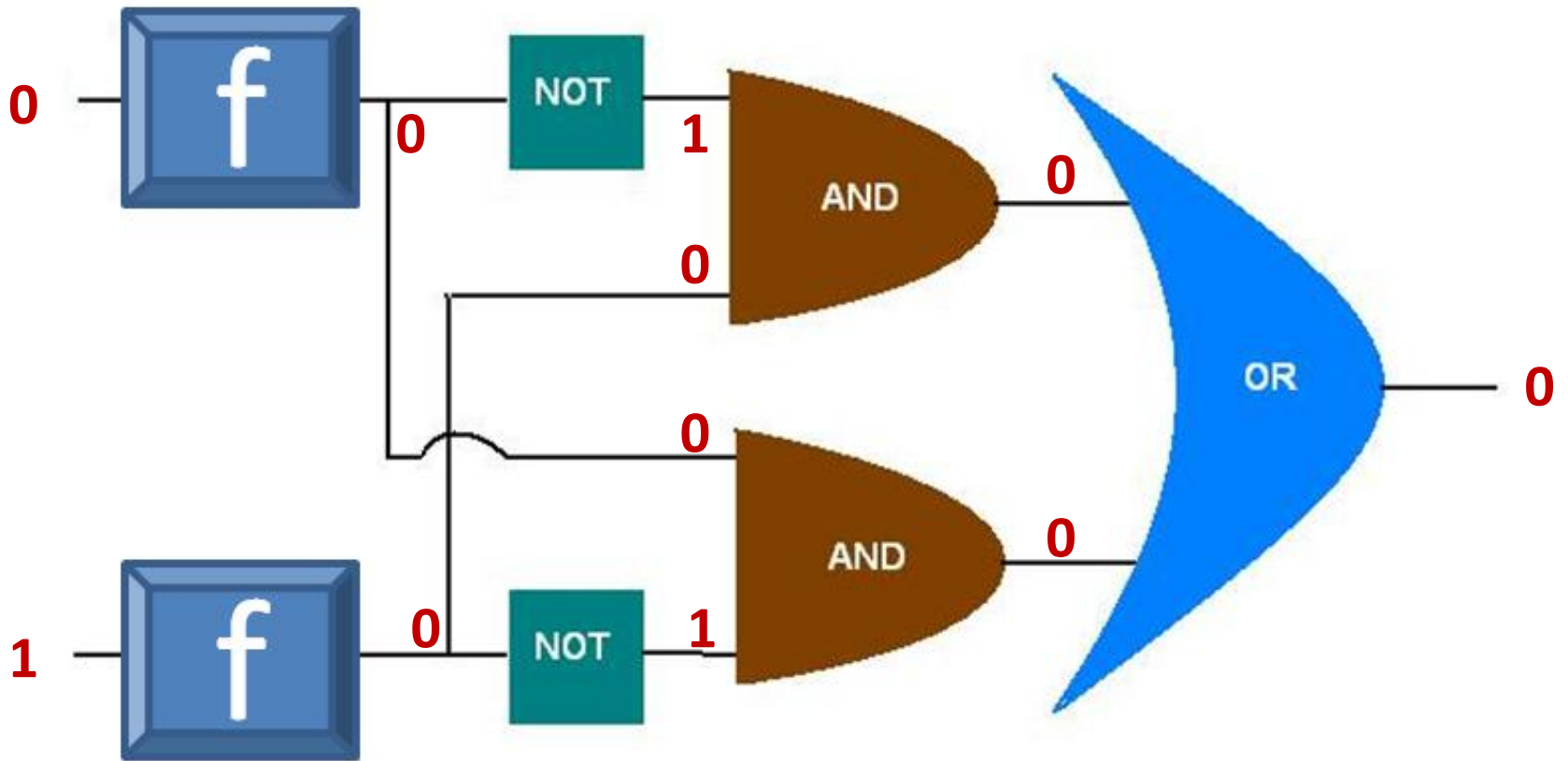


Este circuito devuelve **0** si es constante y **1** en caso contrario

Computación Clásica

Comprobamos I

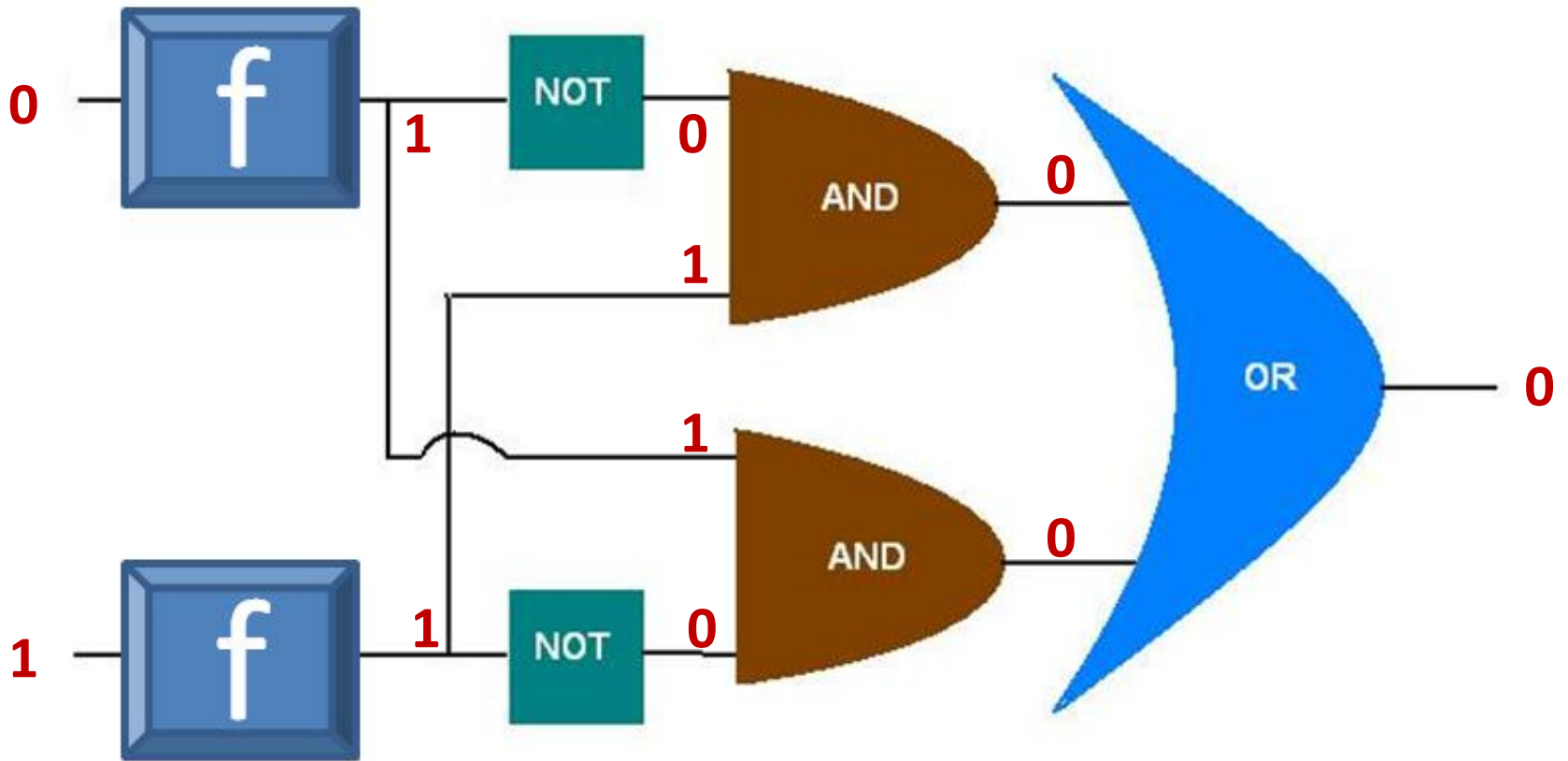
 = constante = 0



Computación Clásica


Comprobamos II

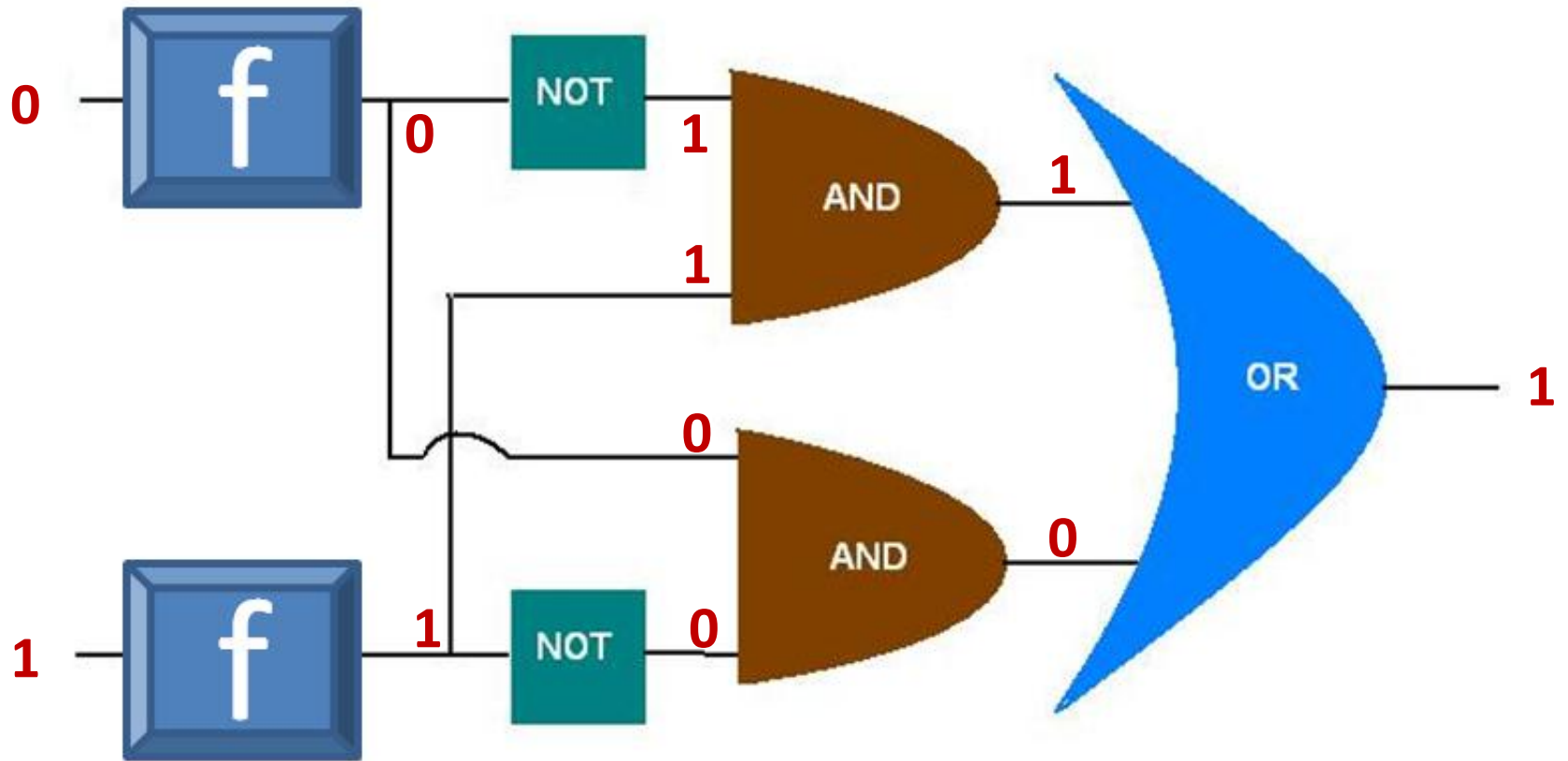
 = constante = 1



Computación Clásica


Comprobamos III

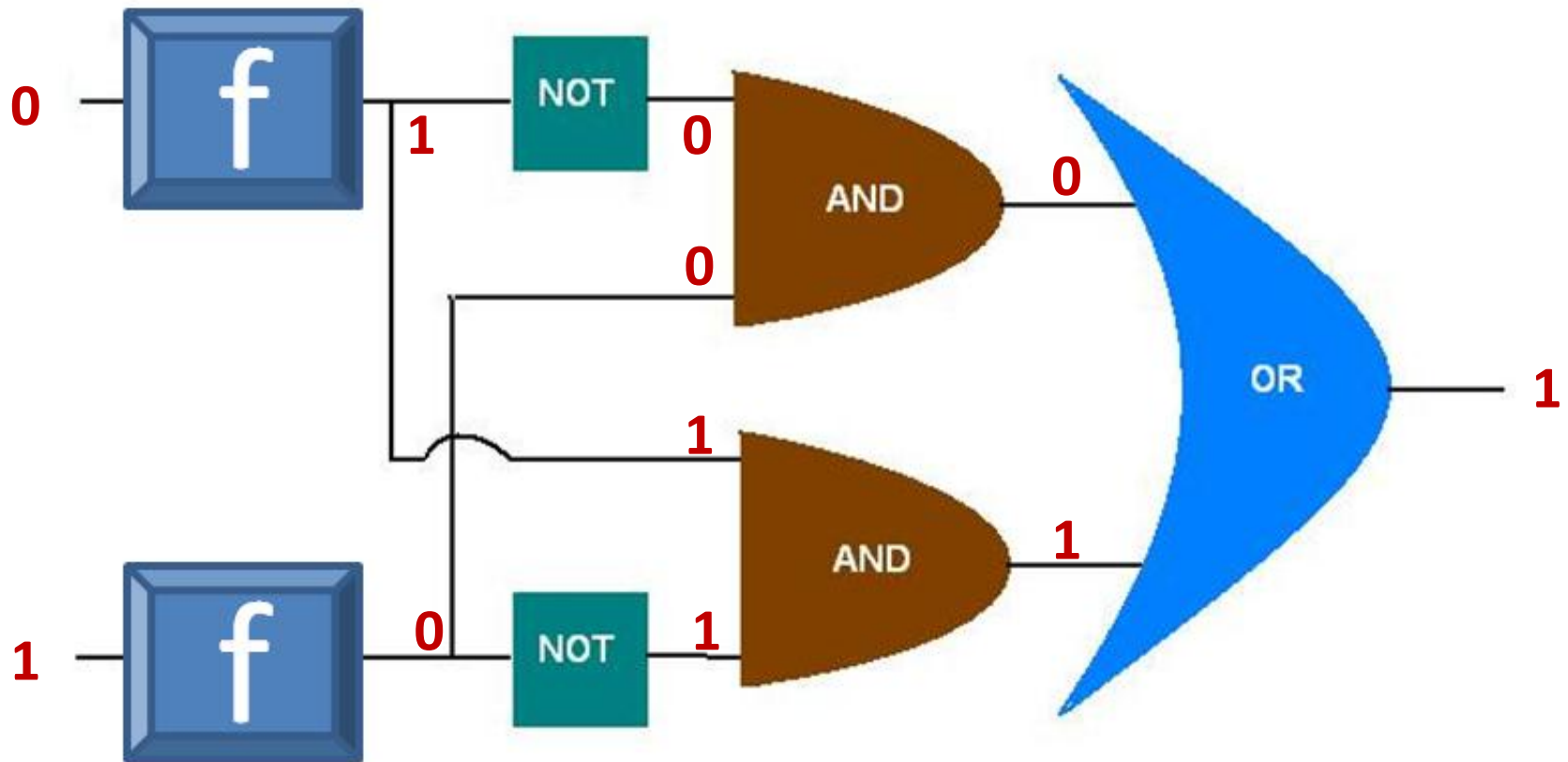
 = NO constante



Computación Clásica

Comprobamos IV

 = NO constante



Probabilidad

Probabilidad

Tenemos dos armarios.
En uno de ellos hay una pelota



$$P = 1/5$$

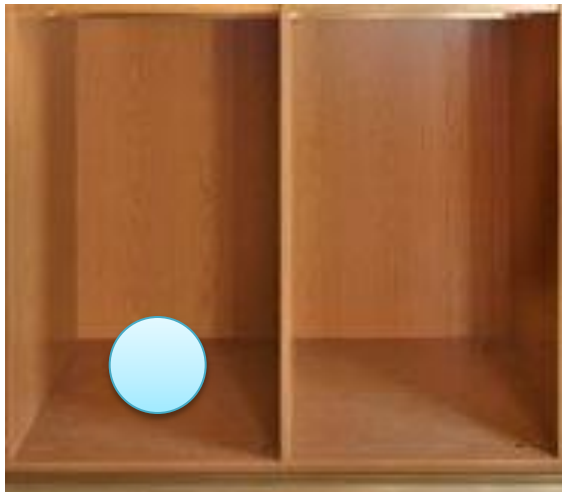
$$P = 4/5$$



Probabilidad

Tenemos dos armarios.
En uno de ellos hay una pelota

$$P = 1/5$$



$$P = 4/5$$



Probabilidad

Tenemos un robot (que se llama U)



U está programado de manera que al abrir la puerta trasera del armario:

1) Si encuentra la pelota a la izquierda:

- La dejará ahí con probabilidad **$2/3$**
- o la moverá a la derecha con probabilidad **$1/3$**

2) Si encuentra la pelota a la derecha:

- La dejará ahí con probabilidad **$1/4$**
- o la moverá a la izquierda con probabilidad **$3/4$**

Probabilidad

Nos preguntamos cuál es la **probabilidad** de encontrar la **pelota a la derecha** después de que el **robot haya actuado**

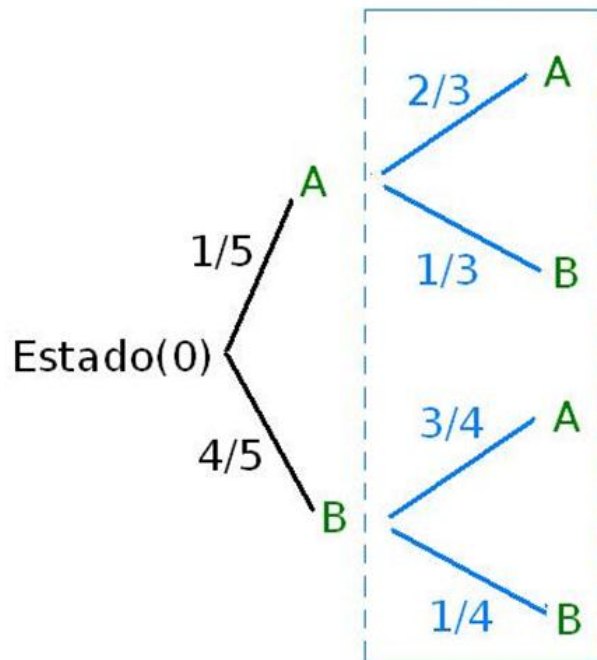


Probabilidad

Diagrama de árbol



U



$$P(A) = \frac{1}{5} \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \frac{3}{4} = \frac{11}{15}$$

$$P(B) = \frac{1}{5} \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \frac{1}{4} = \frac{4}{15}$$



Probabilidad

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = 1/5 \cdot \img alt="A wooden cabinet with a blue ball in the left compartment." data-bbox="479 146 545 221"/> + 4/5 \cdot \img alt="A wooden cabinet with a blue ball in the right compartment." data-bbox="651 146 717 221"/>$$

Probabilidad

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = 1/5 \cdot \img alt="A wooden cabinet with a blue ball in the left compartment." data-bbox="479 146 546 221"/> + 4/5 \cdot \img alt="A wooden cabinet with a blue ball in the right compartment." data-bbox="651 146 718 221"/>$$

$$\text{Estado final} = \img alt="A white robot icon." data-bbox="451 251 481 331"/> \cdot \text{Estado inicial}$$

Probabilidad

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = 1/5 \cdot \img alt="A wooden box with a blue ball in the left compartment." data-bbox="479 146 546 221"/> + 4/5 \cdot \img alt="A wooden box with a blue ball in the right compartment." data-bbox="651 146 718 221"/>$$

$$\text{Estado final} = \img alt="A white robot icon." data-bbox="451 251 481 331"/> \cdot \text{Estado inicial}$$

$$\text{Estado final} = \img alt="A white robot icon." data-bbox="358 358 388 438"/> \left(1/5 \cdot \img alt="A wooden box with a blue ball in the left compartment." data-bbox="491 351 558 426"/> + 4/5 \cdot \img alt="A wooden box with a blue ball in the right compartment." data-bbox="661 351 728 426"/> \right)$$

Probabilidad

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = 1/5 \cdot \text{[Caja con bola a la izquierda]} + 4/5 \cdot \text{[Caja con bola a la derecha]}$$

$$\text{Estado final} = \text{[Robot]} \cdot \text{Estado inicial}$$

$$\text{Estado final} = \text{[Robot]} \left(1/5 \cdot \text{[Caja con bola a la izquierda]} + 4/5 \cdot \text{[Caja con bola a la derecha]} \right)$$

$$\text{Estado final} = 1/5 \cdot \text{[Robot a la izquierda de la caja con bola a la izquierda]} + 4/5 \cdot \text{[Robot a la izquierda de la caja con bola a la derecha]}$$

Probabilidad

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = 1/5 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \cdot \text{Estado inicial}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \left(1/5 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment]} \right)$$

$$\text{Estado final} = 1/5 \cdot \text{[robot in left compartment with robot]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment with robot]}$$

$$\text{[robot in left compartment with robot]} = 2/3 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/3 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{[robot in right compartment with robot]} = 3/4 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/4 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

Probabilidad

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = 1/5 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \cdot \text{Estado inicial}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \cdot \left(1/5 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment]} \right)$$

$$\text{Estado final} = 1/5 \cdot \text{[robot in left compartment with robot]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment with robot]}$$

$$\text{[robot in left compartment with robot]} = 2/3 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/3 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{[robot in right compartment with robot]} = 3/4 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/4 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{Estado final} = 1/5 \cdot \left(2/3 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/3 \cdot \text{[robot in right compartment]} \right) + 4/5 \cdot \left(3/4 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/4 \cdot \text{[robot in right compartment]} \right)$$

Probabilidad

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = 1/5 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \cdot \text{Estado inicial}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \cdot \left(1/5 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment]} \right)$$

$$\text{Estado final} = 1/5 \cdot \text{[robot in left compartment with robot]} + 4/5 \cdot \text{[robot in right compartment with robot]}$$

$$\text{[robot in left compartment with robot]} = 2/3 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/3 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{[robot in right compartment with robot]} = 3/4 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/4 \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{Estado final} = 1/5 \cdot \left(2/3 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/3 \cdot \text{[robot in right compartment]} \right) + 4/5 \cdot \left(3/4 \cdot \text{[robot in left compartment]} + 1/4 \cdot \text{[robot in right compartment]} \right)$$

$$\text{Estado final} = \left(1/5 \cdot 2/3 + 4/5 \cdot 3/4 \right) \text{[robot in left compartment]} + \left(1/5 \cdot 1/3 + 4/5 \cdot 1/4 \right) \text{[robot in right compartment]}$$

Probabilidad

Probabilidad final

$$\text{Estado final} = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \right) \text{ [ball on left]} + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \right) \text{ [ball on right]}$$

$$\text{Estado final} = \frac{11}{15} \text{ [ball on left]} + \frac{4}{15} \text{ [ball on right]}$$

Probabilidad final de estar a la izquierda

Probabilidad final de estar a la derecha

Mecánica cuántica

Mecánica cuántica

Tenemos dos armarios.

En uno de ellos hay una **pelota cuántica**



Amplitudes



$$\frac{1}{5}$$



$$\frac{2\sqrt{6}}{5}$$



Se ha de cumplir



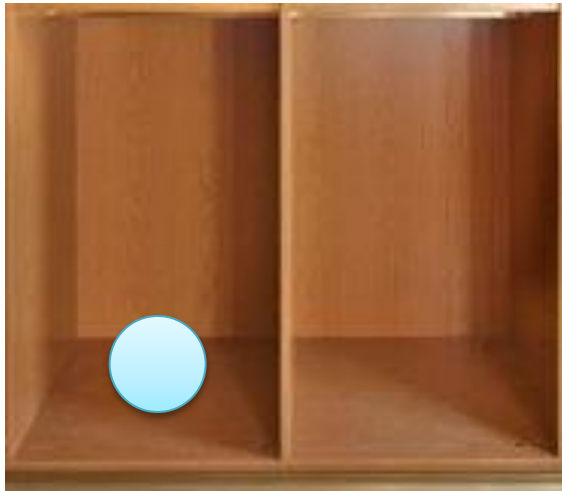
$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1$$


Mecánica cuántica

Tenemos dos armarios.

En uno de ellos hay una **pelota cuántica**

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{5}$$




Mecánica cuántica

Tenemos un robot **cuántico** (que se llama U)



U está programado de manera que al abrir la puerta trasera del armario:

1) Si encuentra la pelota a la **izquierda**:

- La dejará ahí con **AMPLITUD $2/3$**

- o la moverá a la derecha con **AMPLITUD $(\sqrt{5})/3$**

2) Si encuentra la pelota a la **derecha**:

- La dejará ahí con **AMPLITUD $-2/3$**

- o la moverá a la izquierda con **AMPLITUD $(\sqrt{5})/3$**

Mecánica cuántica

Tenemos un robot **cuántico** (que se llama U)



REVERSIBILIDAD y UNITARIEDAD

$$(A \rightarrow A)^2 + (A \rightarrow B)^2 = 1$$

$$(B \rightarrow B)^2 + (B \rightarrow A)^2 = 1$$

$$(A \rightarrow A)(B \rightarrow A) + (A \rightarrow B)(B \rightarrow B) = 0$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{-2}{3}$$

U está programado de manera que al abrir la puerta trasera del armario:

1) Si encuentra la pelota a la **izquierda**:

- La dejará ahí con **AMPLITUD** $\frac{2}{3}$

- o la moverá a la derecha con **AMPLITUD** $\frac{\sqrt{5}}{3}$

2) Si encuentra la pelota a la **derecha**:

- La dejará ahí con **AMPLITUD** $\frac{-2}{3}$

- o la moverá a la izquierda con **AMPLITUD** $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Mecánica cuántica

Nos preguntamos cuál es la **AMPLITUD** de encontrar la **pelota a la derecha** después de que el **robot cuántico** haya actuado sobre la **pelota cuántica**

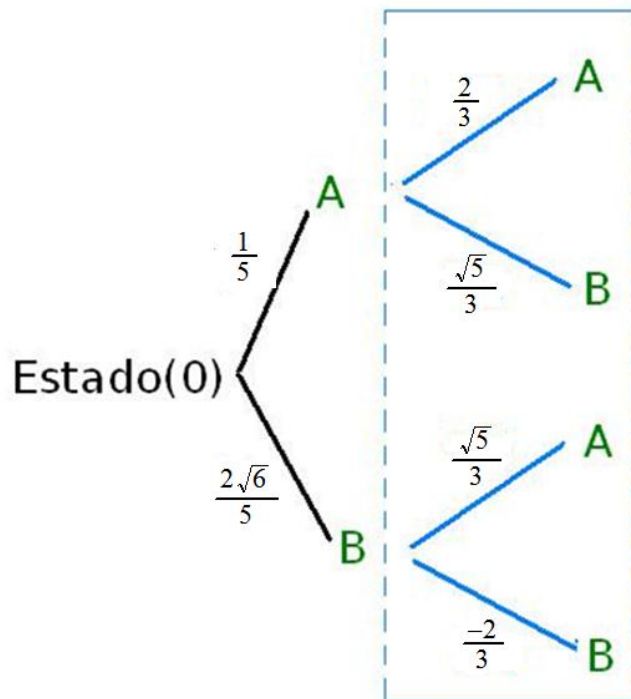


Mecánica cuántica

Diagrama de árbol



U



$$\text{Amplitud de estar en } A = \frac{1}{5} \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.86363$$

$$\text{Amplitud de estar en } B = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \frac{2}{3} \approx -0.50413$$

$$(0.86363)^2 + (-0.50413)^2 = 1.0 \quad \checkmark$$

Mecánica cuántica

Existe un álgebra equivalente, por ser un proceso lineal

$$\text{Estado inicial} = \frac{1}{5} \cdot \text{[robot in left compartment]} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \cdot \text{Estado inicial}$$

$$\text{Estado final} = \text{[robot]} \left(\frac{1}{5} \cdot \text{[robot in left compartment]} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \text{[robot in right compartment]} \right)$$

$$\text{Estado final} = \frac{1}{5} \cdot \text{[robot in left compartment with robot]} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \text{[robot in right compartment with robot]}$$

$$\text{[robot in left compartment with robot]} = \frac{2}{3} \cdot \text{[robot in left compartment]} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{[robot in right compartment with robot]} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \text{[robot in left compartment]} - \frac{2}{3} \cdot \text{[robot in right compartment]}$$

$$\text{Estado final} = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \text{[robot in left compartment]} + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) \text{[robot in right compartment]}$$

Mecánica cuántica

Probabilidad final

$$\text{Estado final} = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \text{ [izquierda]} + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) \text{ [derecha]}$$

$$\text{Estado final} = 0.8636 \text{ [izquierda]} - 0.50413 \text{ [derecha]}$$

AMPLITUD final de
estar a la izquierda

AMPLITUD final de
estar a la derecha

$$\text{Probabilidad A} = \left(\frac{1}{5} \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 = (0.86363)^2 = 0.74586$$


$$\text{Probabilidad B} = \left(\frac{1}{5} \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \frac{2}{3} \right)^2 = (-0.50413)^2 = 0.25414$$


$$0.74586 + 0.25414 = 1$$

Computación cuántica

Computación cuántica

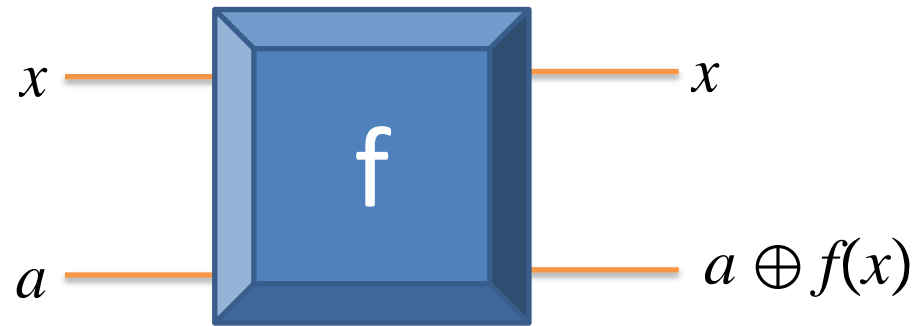
Puerta cuántica Hadamard


$$\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$$


$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$$

Computación cuántica

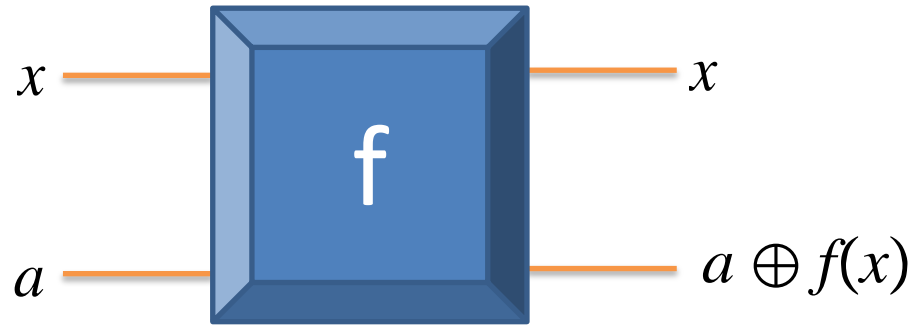
Puerta cuántica: FUNCIÓN



Reversible!

Computación cuántica

Puerta cuántica: FUNCIÓN



$$x \in \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$a \in \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array}$$

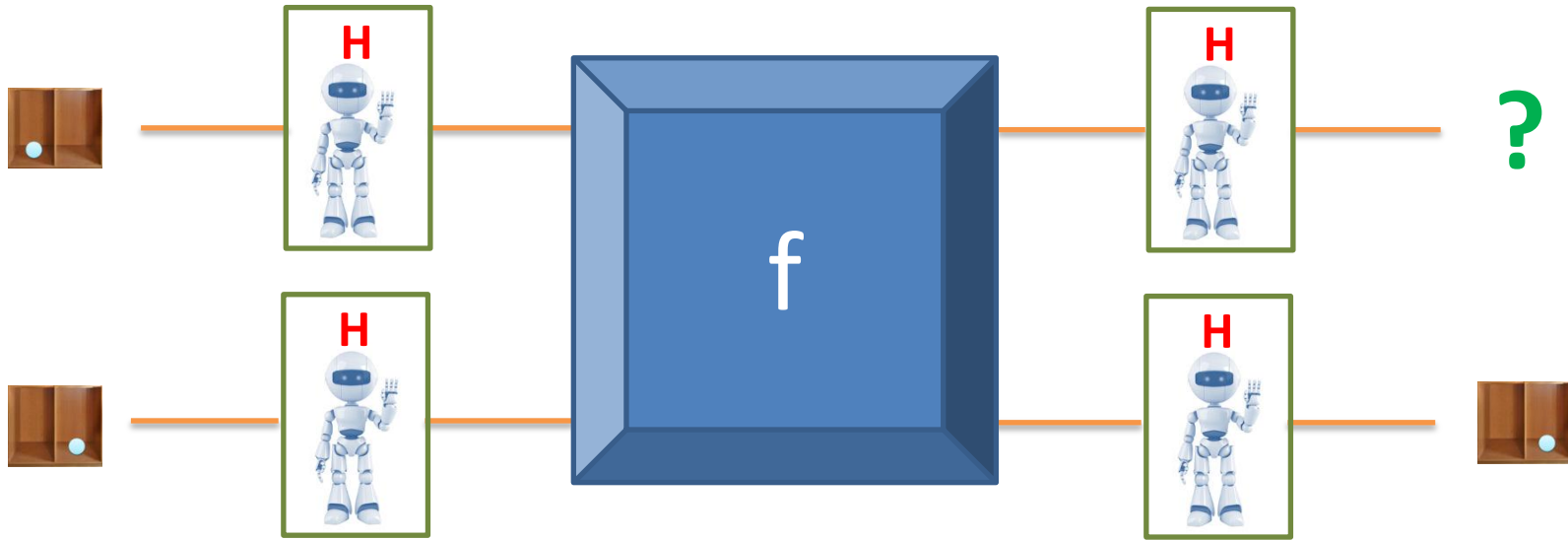
$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \end{array}$$

Computación cuántica

Algoritmo Deutsch-Jozsa

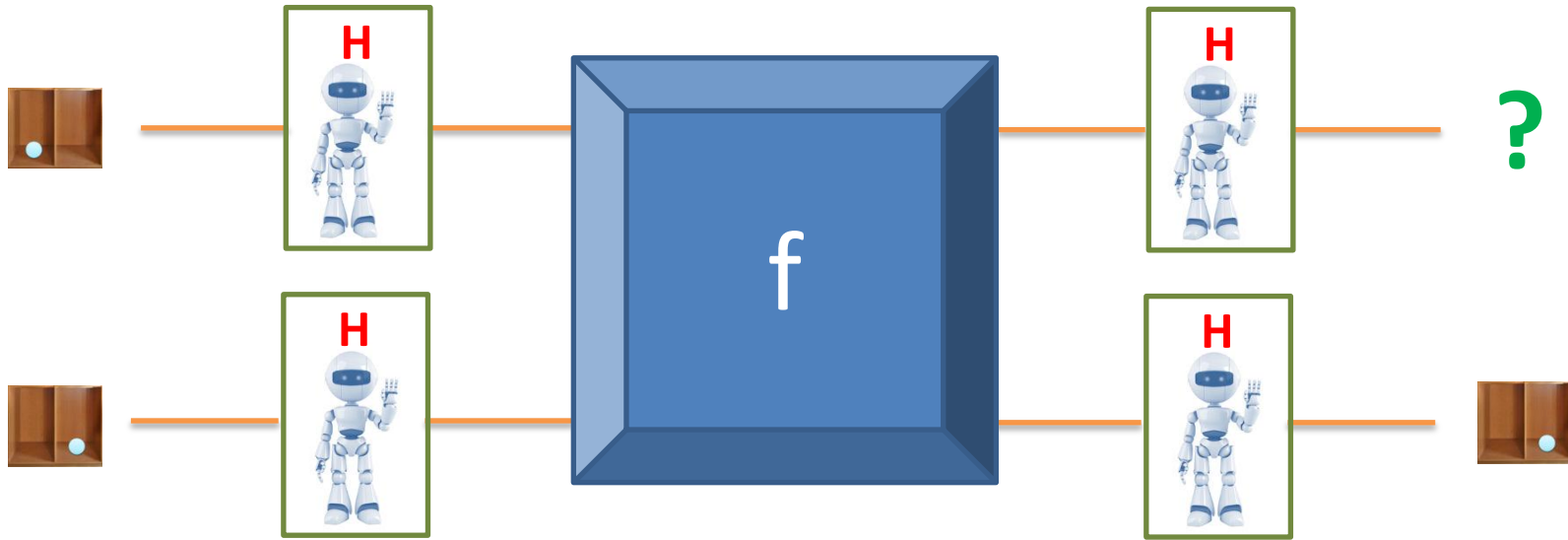


Si ? =  \Rightarrow Función constante

Si ? =  \Rightarrow Función **NO** constante

Computación cuántica

Algoritmo Deutsch-Jozsa



Si ? =  \Rightarrow Función constante

Si ? =  \Rightarrow Función **NO** constante

La mejora con respecto al algoritmo clásico es que solo se usa la puerta f una vez.

Computación cuántica

Realización experimental Deutsch-Jozsa

letters to nature

© 2003 Nature Publishing Group

.....

Implementation of the Deutsch–Jozsa algorithm on an ion-trap quantum computer

**Stephan Gulde^{*}, Mark Riebe^{*}, Gavin P. T. Lancaster^{*}, Christoph Becher^{*},
Jürgen Eschner^{*}, Hartmut Häffner^{*}, Ferdinand Schmidt-Kaler^{*},
Isaac L. Chuang^{*†} & Rainer Blatt^{*}**

^{} Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, Technikerstraße 25,
A-6020 Innsbruck, Austria*

[†] MIT Media Laboratory, Cambridge, Massachusetts 02139, USA

Fin

primera parte